Poisson-fordeling og Poisson-prosess

Kapittel 3.7 læreboken

Video: Del 1 og Del 2

Poisson-fordeling

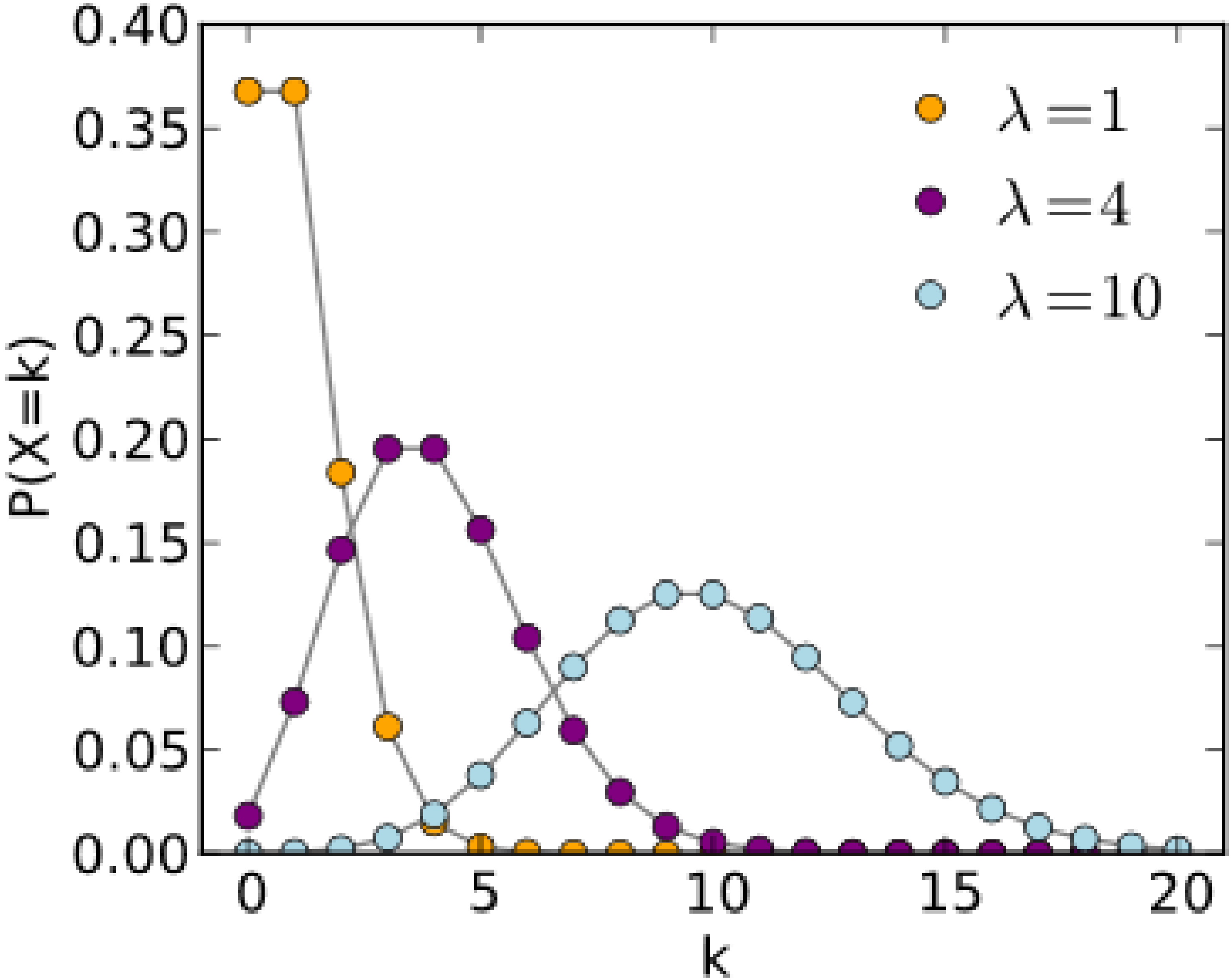
Siméon Poisson

- Passer for «tellinger» (når vi ikke vet er øvre grense)
  - Antall «pip» fra Geigerteller i løpet av 1 min.
  - Antall SMS du mottar på mobilen på en dag
- Parameter $\lambda \geq 0 \quad (= \mu = E(X))$
- Punktsannsynlighet

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \qquad x = 0,1,2, \dots$$

Må sjekke:

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$


0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
P(X=k)
0
5
10
15
20
k
λ = 1
λ = 4
λ = 10

NTNU video

- Dette er en god video som du bør se
- Et langt bevis starter rundt 8 minutter. Du kan droppe dette, men se kommentarer senere i slidene
- Klikk først på https://wiki.math.ntnu.no/tma4245/tema/video
- Velg så «Poisson-prosess og Poisson-fordeling»

Forventning og varians

- Dersom $X \sim Poisson(\lambda)$ har vi

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

- Bevis i oppgave 6.10 på regneøvelser
- Merk at forventning og varians er **like**: kun for Poisson-fordeling (så vidt jeg vet).

Eksempel: Antall kunder

- Antall kunder (*X*) i en klokkebutikk er Poissonfordelt med et gjennomsnitt på 10 pr dag
- Da vet vi at $\lambda = 10$ (siden $E(X) = \lambda$)
- Varians: $\sigma^2 = \lambda = 10$ som gir standardavvik $\sigma = \sqrt{10} = 3.16$
- Sannsynlighet for akkurat $x = 3$ kunder

$$P(X = 3) = p(3) = \frac{10^3}{3!} e^{-10} = 0.0076$$

- Det samme fra tabell A2 (s. 791)

$$P(X = 3) = P(X \leq 3)\text{-}P(X \leq 2)$$
$$= 0.010 - 0.003 = 0.007$$

Poisson som grense for binomisk fordeling

Binomisk situasjon:
1. n forsøk
2. To mulige utfall i hvert forsøk: suksess og fiasko
3. De n forsøkene er uavhengige
4. $p = P(\text{suksess})$ lik i alle n forsøk

- Anta $X = antall\ suksesser$
- La $n \to \infty$ og $p \to 0$ på slik måte at

$$E(X) = np \to \lambda$$

<u>Resultat</u>

Vi har $Bin(n, p) \to Poisson(\lambda)$

- Bevis s. 147 og også med i NTNU-videoen
- Se tabell 3.2 s. 148 for nøyaktighet av «Poisson tilnærmingen»

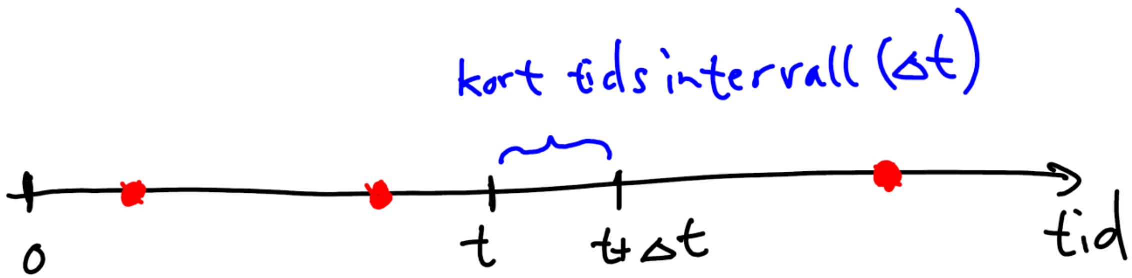
<u>Oppgave 98 side 151 i boken</u>

«Suppose that only 0.10% of all computers of a certain type experience CPU failure during the warranty period. Consider a sample of 10,000 computers.»

La *X* = «antall maskiner med feil». Hvilken fordeling har *X* eksakt og tilnærmet?

Poisson-prosess

• = mobilen din ringer



- Antagelser (for liten Δt)
  1. P(1 hendelse i $[t, t+\Delta t]$) = $\alpha \cdot \Delta t + o(\Delta t)$
  2. P(2 eller flere hendelser i $[t, t+\Delta t]$) $=$ $o(\Delta t)$
  3. Hendelser i disjunkte tidsperioder er uavhengige
- La X være antall hendelser total i $[0, t]$

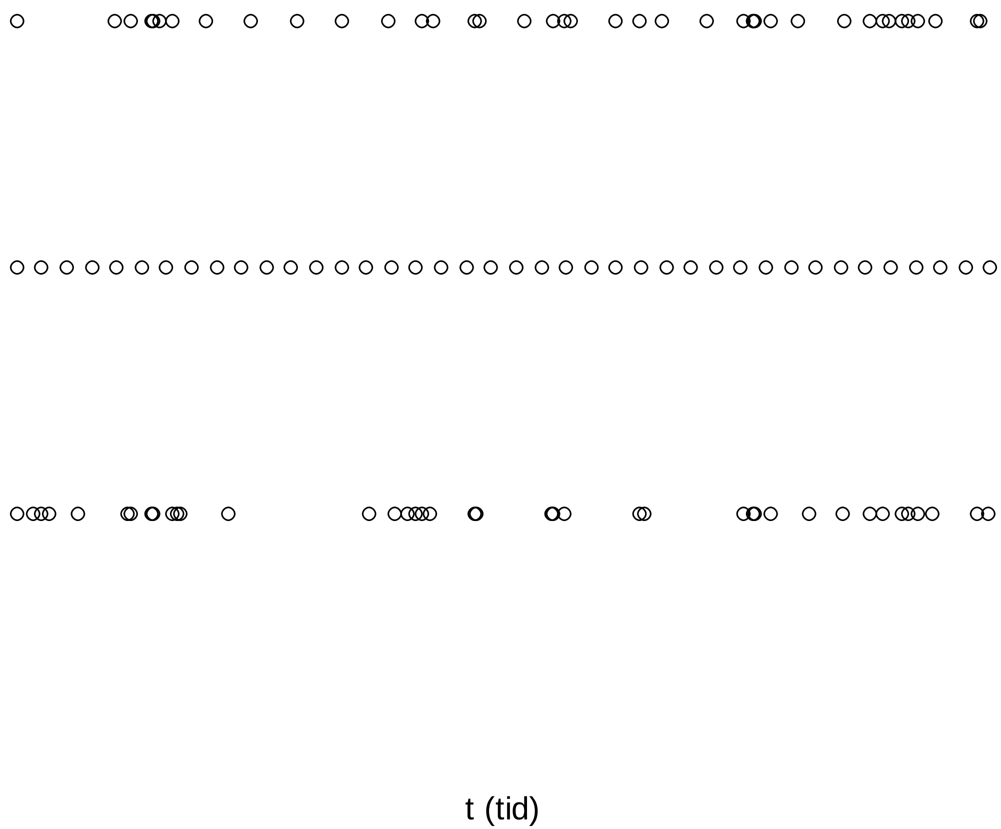
$$X \sim Poisson(\lambda), \qquad \lambda = \alpha \cdot t$$

α er «intensitet»

Ikke nødvendigvis korte intervaller

Viktig resultat; se NTNU video for «bevis»

Hvilken sekvens er en Poisson-prosess, dvs "helt tilfeldig"?



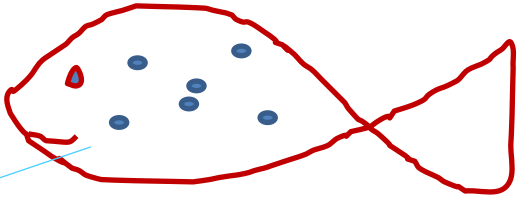
Poisson-prosess i planet

1. P(1 hendelse) $= \alpha \cdot \boldsymbol{\Delta A} + o(\Delta A)$
2. P(2 eller flere hendelser) $= o(\Delta A)$
3. Hendelser i disjunkte **områder** er uavhengige

- Sterner på himmelen?

Område med areal
$\Delta A = \Delta x \times \Delta y$

- Lakselus på en fisk?



$X = 6$

Oppsummering

- Poisson-fordeling er for tellinger
- Forventing og varians er like
- Binomisk fordeling går mot Poisson-fordeling når $np \to \lambda$
- Poisson-prosess
  - Antall begivenheter i et gitt tidsintervall har Poisson fordeling

Oppgaver

- Oppgave 93a,b side 151 i boken
- Oppgave 98 side 151 i boken
- Oppgave 100 side 151 i boken