Oppgavesett 3

Oppgave 1

To kort blir trekt etter hverandre og uten tilbakelegging fra en vanlig kortstokk med 52 kort. Regn ut sannsynligheten for å trekke:

(a) To hjerter $(\heartsuit_1 \cap \heartsuit_2)$

(b) Et hjerter i første trekning og en kløver i andre $(\heartsuit_1 \cap \clubsuit_2)$

(c) Et hjerte i første og et ess på andre $(\heartsuit_1 \cap \mathbf{A}_2)$

Hint: I spørsmål (c), merk at det første kortet som trekkes, kan være hjerter-ess.

Løsning:

(a) $\mathrm{P}(\heartsuit_1 \cap \heartsuit_2) = \mathrm{P}(\heartsuit_1)\,\mathrm{P}(\heartsuit_2|\heartsuit_1) = \frac{13}{52}\frac{12}{51} = \frac{1}{17} = 0.0588$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) $\mathrm{P}(\heartsuit_1 \cap \clubsuit_2) = \mathrm{P}(\heartsuit_1)\,\mathrm{P}(\clubsuit_2|\heartsuit_1) = \frac{13}{52}\frac{13}{51} = \frac{13}{204} = 0.0637$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(c) $\mathrm{P}(\heartsuit_1 \cap \mathbf{A}_2) = \mathrm{P}(\heartsuit_1 \cap \mathbf{A}_1)\,\mathrm{P}(\mathbf{A}_2|\heartsuit_1 \cap \mathbf{A}_1) + \mathrm{P}\left(\heartsuit_1 \cap \overline{\mathbf{A}}_1\right)\mathrm{P}\left(\mathbf{A}_2|\heartsuit_1 \cap \overline{\mathbf{A}}_1\right) = \frac{1}{52}\frac{3}{51} + \frac{12}{52}\frac{4}{51} = \frac{1}{52} = 0.019$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 2

Bevis del (b) og (c) i følgende teorem:

Teorem: Hvis A og B er uavhengige, følger det at følgende begivenheter også er uavhengige:

(a) A og B′

(b) A′ og B

(c) A′ og B′

Løsning:

(a) Blir ikke spurt etter, fordi den er symmetrisk lik (b).

(b) Bruker at $\mathrm{P}(\mathrm{A}'|\mathrm{B}) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ *og at* A *og* B *uavhengige impliserer* $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\,\mathrm{P}(\mathrm{A}'|\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\,(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\,(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\,\mathrm{P}(\mathrm{A}')$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(c) Bruker at $\mathrm{P}(\mathrm{A}'|\mathrm{B}') = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}') = \mathrm{P}(\mathrm{A}')$ *av (a).*

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}') = \mathrm{P}(\mathrm{B}')\,\mathrm{P}(\mathrm{A}'|\mathrm{B}') = \mathrm{P}(\mathrm{B}')\,(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}')) = \mathrm{P}(\mathrm{B}')\,(1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})) = \mathrm{P}(\mathrm{B}')\,\mathrm{P}(\mathrm{A}')$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 3

La A og B være to begivenheter.

(a) Hvis A og B er innbyrdes ekslusive $(A \cap B = \emptyset)$, er A og B alltid uavhengige? Hvis svaret er nei, kan de i det hele tatt være uavhengige? Forklar.

(b) Hvis $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, kan A og B under noen omstendighet være uavhengige? Forklar.

Løsning:

(a) *Nei, så lenge* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) > 0$ *og* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) > 0$ *er* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0 \neq \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B})$. *Hvis en av de hender med sannsynlighet* 0, *er de uavhengige.*

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) *Siden* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ *er* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{P}(\mathrm{B})$ *og* $\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = 1$. *Vi har derfor at* $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})$ *Derfor er* A *og* B *bare uavhengige hvis* $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0$ *eller* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 4

Vi kaster mynt fem uavhengige ganger. La K betegne krone og M mynt. Regn ut sannsynligheten for

(a) $KKMKM$

(b) $MKKKM$

(c) $KMKMK$

(d) Tre kroner inntreffer i løpet av de fem kastene

Løsning:

Vi lar A *betegne begivenheten i oppg (a),* B *i (b) osv.*

(a) $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) *Siden krone og mynt er like sannsynlig er* $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{32}$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(c) $\mathrm{P}(\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{1}{32}$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(d) *La* X *være antall kroner i løpet av 5 kast. Da er* X *binomisk med suksessansynlighet* $\frac{1}{2}$ *og 5 forsøk, slik at*

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = 0.3125$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 5

Bønnefrø fra leveradør A har 85% spiringsrate og fra leverandør B har tilsvarende frø 75% spiringsrate. Et selskap kjøper 40% av bønnefrøene sine fra leveradør A og 60% fra leverandør B og blander disse sammen før de selger dem videre til kunder.

(a) Finn sannsynligheten $\mathrm{P}(G)$ for at et tilfeldig valgt frø fra de blandede frøene vil spire.

(b) Gitt at frøet spirer, finn sannsynligheten for at frøet er levert av leverandør A.

Løsning:

Leverandør	*A*	*B*
Spirerate	*85%*	*75%*
Andel	*40%*	*60%*

G *er begivenheten at frøet spirer.*

(a) *Finner sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø spirer:*

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(G) &= \mathrm{P}(G|A)\,\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(G|B)\,\mathrm{P}(B) \\ &= 0.85 \cdot 0.40 + 0.75 \cdot 0.60 = 0.79\end{aligned}$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) Finner sannsynligheten for at et tilfeldig valgt frø er fra leverandør A gitt at det spirer:

$$\mathrm{P}(A|G) = \frac{\mathrm{P}(A)\cdot \mathrm{P}(G|A)}{\mathrm{P}(G)} = \frac{0.40\cdot 0.85}{0.79} = 0.43$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 6

Anta at et forsikringsselskap vet de følgende sannsynlighetene relatert til bilulykker.

Alder på sjåføren	Sannsynlighet for ulykke	Andel av selskapets forsikrede sjåfører
16-25	0.05	0.10
26-50	0.02	0.55
51-65	0.03	0.20
66-90	0.04	0.15

En tilfeldig valgt sjåfør fra selskapets forsikrede sjåfører har en ulykke. Hva er den betingede sannsynligheten for at sjåfører er i aldersgruppe 16-25?

Løsning:

La U være begivenheten «tilfeldig sjåfør utsatt for ulykke» og A «sjåfør i aldersgruppe 16-25». Da er

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U) &= 0.05\cdot 0.1 + 0.02\cdot 0.55 + 0.03\cdot 0.20 + 0.04\cdot 0.15 = 0.028\\ \mathrm{P}(A|U) &= \frac{\mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(U|A)}{\mathrm{P}(U)} = \frac{0.1\cdot 0.05}{0.028} = 0.178\end{aligned}$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

Oppgave 7

Grandtantene Albertine (A), Karoline (K) og Petronelle (P) er innbudt til middag. Sannsynligheten for at Albertine kommer er 0.8, og de tilsvarende sannsynlighetene for Karoline og Petronelle er 0.6 og 0.9. De tre tantene kommer uavhengig av hverandre.

(a) Finn sannsynligheten for at alle tre grandtantene skal komme til middag.

(b) Finn sannsynligheten for at ingen kommer.

(c) Hva er sannsynligheten for at iallefall èn av tantene skal komme?

(d) Finn den betingede sannsynligheten for at det er Petronelle som kommer, gitt at det til sammen kommer nøyaktig èn tante.

(e) Det viser seg at Karoline kommer. Hva er nå den betingede sannsynligheten for at Albertine også skal komme?

Løsning:

(a) $\mathrm{P}(A\cap K\cap P) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(K)\,\mathrm{P}(P) = 0.8\cdot 0.6\cdot 0.9 = 0.432$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) $\mathrm{P}\left(\bar{A}\cap \bar{K}\cap \bar{P}\right) = \mathrm{P}\left(\bar{A}\right)\mathrm{P}\left(\bar{K}\right)\mathrm{P}\left(\bar{P}\right) = 0.2\cdot 0.4\cdot 0.1 = 0.008$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(c) La X være antall tanter som kommer. $\mathrm{P}(X\geq 1) = 1-\mathrm{P}(X=0) = 1-0.008 = 0.992$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(d) Vi finner først sannsynligheten for at en tante kommer og deretter den betingede sannsynligheten for

at Petronelle kommer gitt at en tante kommer:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=1) &= \mathrm{P}(P)\,\mathrm{P}(\bar{K})\,\mathrm{P}(\bar{A}) + \mathrm{P}(\bar{P})\,\mathrm{P}(K)\,\mathrm{P}(\bar{A}) + \mathrm{P}(\bar{P})\,\mathrm{P}(\bar{K})\,\mathrm{P}(A) \\
&= 0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.8 \cdot 0.4 + 0.1 \cdot 0.2 \cdot 0.6 \\
&= 0.116 \\
\mathrm{P}(P|X=1) &= \frac{\mathrm{P}(P \cap \bar{K} \cap \bar{A})}{\mathrm{P}(X=1)} = \frac{\mathrm{P}(P)\,\mathrm{P}(\bar{K})\,\mathrm{P}(\bar{A})}{\mathrm{P}(X=1)} = \frac{0.9 \cdot 0.2 \cdot 0.4}{0.116} = 0.621
\end{aligned}
$$

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

(e) *Siden tantene kommer uavhengig av hverandre, påvirkes ikke sannsynligheten for at Albertine kommer av at Karoline kommer:* $\mathrm{P}(A|K) = \mathrm{P}(A) = 0.8$

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

Oppgave 8

60 studenter i STAT110 skal ved semesterets begynnelse inndeles i 3 grupper med 20 studenter hver. Det er 25 gutter og 35 jenter. Anta først at gruppesammensetningen bestemmes ved loddtrekning, slik at de første som trekkes ut kommer i mandagsgruppen, de 20 neste i torsdagsgruppen og de 20 siste i fredagsgruppen.

(a) Hva er sannsynligheten for at den første studenten som trekkes ut er en jente?

(b) Hva er sannsynligheten for at den andre som trekkes ut er en jente? Gitt at den andre som trekkes ut er en jente, hva er den betingede sannsynligheten for at den første som ble trekket ut også var en jente?

(c) Hva er sannsynligheten for at det blir akkurat 10 jenter i mandagsgruppen? Hva er forventet antall jenter i mandagsgruppen?

(d) Hvor mange ulike gruppesammensetninger er det mulig å få, og hva er sannsynligheten for at jentene fordeles seg med 10 i mandagsgruppen, 10 i torsdagsgruppen og 15 i fredagsgruppen?

Løsning:

Totalt 60 studenter, 25 gutter og 35 jenter. La J_1 betegne begivenheten at en jente blir trukket ut i første trekning og J_2 for jente i andre trekning og tilsvarende G_1 og G_2 for gutt.

(a) $\mathrm{P}(J_1) = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

(b) $\mathrm{P}(J_2) = \mathrm{P}(J_1)\,\mathrm{P}(J_2|J_1) + \mathrm{P}(G_1)\,\mathrm{P}(J_2|G_1) = \frac{35}{60}\frac{34}{59} + \frac{25}{60}\frac{35}{59} = \frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(J_1|J_2) = \frac{\mathrm{P}(J_1)\,\mathrm{P}(J_2|J_1)}{\mathrm{P}(J_2)} = \mathrm{P}(J_2|J_1) = \frac{34}{59}$

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

(c) $\mathrm{P}(\textit{10 jenter i mandagsgruppen}) = \frac{\binom{35}{10}\binom{25}{10}}{\binom{60}{20}} = 0.143$. *Forventet antall jenter i mandagsgruppen er* $\frac{35}{60} \cdot 20 = 11.67$.

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

(d) *Totalt antall mulige gruppesammensetninger:* $\binom{60}{20} \cdot \binom{40}{20} \cdot \binom{20}{20} = 5.78 \cdot 10^{26}$. *La A være begivenheten at jentene fordeler seg $(10, 10, 15)$ på de tre gruppene. Da er* $\mathrm{P}(A) = \frac{\binom{35}{10}\binom{25}{10}\binom{25}{10}\binom{15}{10}\binom{15}{15}\binom{5}{5}}{\binom{60}{20}\binom{40}{20}\binom{20}{20}} = 0.0102$.

Se video av løsningsforslaget: *480p* *eller* *1080p.*

Oppgave 9

I et statistikk-kurs skal 150 studenter fordeles i grupper med 25 studenter i hver gruppe. Det er 85 kvinnelige og 65 mannlige studenter. Gruppefordelingen bestemmes ved loddtrekning.

Vi betrakter de 25 studentene som trekkes ut til gruppe 1.

(a) Hva er sannsynligheten for at den første som trekkes ut er en jente?

(b) Hva er sannsynligheten for at den andre som trekkes ut er en jente?

(c) Gitt at den andre og tredje som trekkes ut er en jente, hva er sannsynligheten for at den første som ble trukket ut var en gutt?

(d) La N være antall jenter som trekkes ut i løpet av de 4 første trekningene, og la J_2 og J_3 være begivenhetene at jente trekkes ut i trekning 2 og trekning 3, henholdsvis. Finn den betingede sannsynligheten $\mathrm{P}(N = 4|J_2 \cap J_3)$ og den betingde forvetningen $\mathrm{E}(N|J_2 \cap J_3)$.

Løsning:

G_i: Gutt i i'te trekning. J_i: Jente i i'te trekning

(a) $\mathrm{P}(J_1) = \frac{85}{150}$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(b) $\mathrm{P}(J_2) = \mathrm{P}(J_1)\mathrm{P}(J_2|J_1) + \mathrm{P}(J_1)\mathrm{P}(J_2|G_1) = \frac{85}{150}\frac{84}{149} + \frac{65}{150}\frac{84}{149} = \frac{85}{150}$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(c) Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

$\mathrm{P}(J_2 \cap J_3) = \mathrm{P}(G_1)\mathrm{P}(J_2 \cap J_3|G_1) + \mathrm{P}(J_1)\mathrm{P}(J_2 \cap J_3|J_1) = \frac{65}{150}\frac{85}{149}\frac{84}{148} + \frac{85}{150}\frac{84}{149}\frac{83}{148} = \frac{85}{150}\frac{84}{149}$ *og ved bruk av Bayes setning*

$$\mathrm{P}(G_1|J_2 \cap J_3) = \frac{\mathrm{P}(G_1)\mathrm{P}(J_2 \cap J_3|G_1)}{\mathrm{P}(J_2 \cap J_3)} = \frac{\frac{65}{150}\frac{85}{149}\frac{84}{148}}{\frac{85}{150}\frac{84}{149}} = \frac{65}{148}$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.

(d) Tilsvarende

$$\mathrm{P}(G_1 \cap J_4|J_2 \cap J_3) = \mathrm{P}(J_1 \cap G_4|J_2 \cap J_3) = \frac{65}{148}\frac{83}{147}$$

og

$$\mathrm{P}(G_1 \cap G_4|J_2 \cap J_3) = \frac{65}{148}\frac{64}{147}$$

Derfor

$$\mathrm{E}(N|J_2 \cap J_3) = 2 \cdot \frac{65}{148}\frac{64}{147} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{65}{148}83147 + 4 \cdot \frac{83}{148}\frac{82}{147} = \frac{67914}{21756} = 3.122$$

Se video av løsningsforslaget: 480p eller 1080p.